VIAGGIO STORICO NEL MONDO DEI NUMERI

Materiale di aggiornamento costruito da
MELONI GIANNA (N.R.D. di Bologna)

STORIA DELLA MATEMATICA PERCHÉ ?

1. Offrire diverse opportunità per legare il curricolo di matematica con quello di storia, di geografia o di lingua. Unitarietà dell'insegnamento...
2. Scoprire che degli ostacoli epistemologici,
   cioè legati alla disciplina,
   sono stati superati anche dopo migliaia di anni di studio, ricerca ed applicazione.
3. Conoscere la storia della matematica
   significa rompere definitivamente
   la credenza socialmente condivisa
   della matematica come disciplina statica, del certo, fatta di definizioni, formule, operazioni...
4. Se insegnata in modo ricco di esempi concreti
   la storia della matematica favorisce
   l'interesse e la motivazione all'apprendimento.

VIAGGIO STORICO NEL MONDO DEI NUMERI

Numeri, numerali, cifre, nomi dei numeri

Una delle prime attività matematiche dell'uomo è stata l'operazione del contare.
Ma cosa implica l'operazione del conteggio?
Contare: assegnare in modo ordinato un numero ad ogni oggetto di una raccolta
in modo tale che ad ogni oggetto spetti un preciso numero

- "uno ed uno soltanto",
- iniziando dal numero uno ,
- ci deve essere un oggetto "ultimo".

Il numero che viene associato all'ultimo elemento contato indica la quantità totale
degli oggetti della raccolta.
L'operazione del contare fornisce un modello intuitivo di legame fra i due concetti di numero.

1. Numero come ordinale
   stabilisce un ordine all'interno di una successione.
2. Numero come cardinale
   indica la quantità di una raccolta.

L'operazione del contare è nata da esigenze di carattere pratico.
Successivamente ha comportato due problemi:

1. definire i **nomi** per indicare i numeri indipendentemente dagli oggetti,
2. definire i **segni** grafici per simbolizzare i numeri.

L'uomo si accorse lentamente della possibilità di ottenere con pochi segni numeri di grande valore.
Ecco quindi nascere i primi sistemi di numerazione
sumero-babilonese, egiziano, maya, greco, romano.
In essi si distinguono:

- **i segni-simbolo,**
- **i numerali** (il complesso di segni-simboli adoperati per indicare un numero),
- **i nomi** dei numeri**.**

Più tardi gli indiani si accorsero che si potevano ridurre notevolmente i segni-simbolo e scrivere comunque numeri di grande valore.
Stabilirono non solo il valore del singolo segno-simbolo, ma anche il valore della posizione nel numerale: **sistema posizionale.**

E lo *zero?*

Il concetto di numero proviene dall'azione del contare, e questa ha bisogno di un riferimento concreto.
Per molto tempo l'uomo non sentì il bisogno del numero zero per indicare una quantità di oggetti ...senza alcun oggetto.
L'esigenza nacque con la scoperta e l'uso del sistema posizionale, quando ci si trovò nella necessità di scrivere numeri "lunghi":

- **avere un segno**
- **per indicare un posto vuoto.**

Furono sempre gli indiani a concepire l'idea della **quantità zero**, usando un "tondino" per indicare un posto vuoto in un numerale.
Gli arabi divulgarono l'idea e lo chiamarono ***zifr***.
In Europa ***zifr*** venne tradotto con ***cifra*** e con ***zero***, perché si considerava lo zero come cifra per eccellenza.
Il sistema si è divulgato in tutto il mondo sino ai nostri giorni, per cui:

- **i segni simbolo, ovvero le** cifre**, sono dieci:**
  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- servono per comporre i **numerali**
- semplici o composti;
- le cifre cambiano valore a seconda della
  posizione che occupano nel numerale;
- ad ogni numerale:
  corrisponde un numero-**quantità**,
  corrisponde un **nome** semplice o composto**.**

Ma come definire il numero?

L'idea di numero

Distinte le idee del numero in numerale, cifra, nome, cardinale e ordinale, resta il problema centrale di cercare di dare una definizione matematica il più possibile convincente dell'idea intuitiva di numero.
L'idea di numero è così radicata nel profondo della mente e della storia dell'uomo, che ogni tentativo
di definizione matematica sembra destinato al circolo vizioso, all'uso di assiomi, all'accettazione ultima del numero come ***intuizione primitiva*** dell'uomo.

E ...

L'intuizione del numero

Diverse ricerche sono state condotte per stabilire se gli animali fossero in grado di effettuare l'operazione del conteggio.
Tra la fine del secolo scorso e l'inizio del '900 gli scienziati studiarono diversi casi di animali "sapienti", capaci di contare e a volte di comunicare messaggi utilizzando particolari alfabeti. Ma gli studi degli scienziati sfatarono la credenza che gli animali possano contare.

La ricerca si spostò allora sull'ipotesi se gli animali sapessero distinguere <u>quantità diverse</u>, e se sì fino a che punto.
La ricerca verificò che diverse specie di animali sanno riconoscere se dalla loro tana o nido era scomparso uno dei loro numerosi piccoli, così come molti animali domestici sanno accorgersi della sparizione di un oggetto familiare.
La conoscenza di questa sensazione numerica fu approfondita con ricerche su animali particolarmente intelligenti (scimmie, delfini, elefanti, ecc.)

Il famoso caso del corvo.

"Un castellano voleva catturare un corvo che aveva fatto il nido in una torre del suo castello. Il corvo ovviamente fuggiva appena percepiva che il castellano entrava nella torre e si avvicinava al suo nido. Il castellano pensò di ingannare l'uccello entrando nella torre con un amico e uscendo successivamente da solo. Il corvo tuttavia non cadde nella trappola. Il castellano ripeté il trucco facendo entrare tre persone e facendone uscire due, poi quattro persone e uscire tre, ma l'uccello non si lasciò mai catturare. Solo facendo entrare cinque persone e uscire quattro il castellano riuscì finalmente ad ingannare il corvo."
Il corvo non riusciva a distinguere raccolte di **quattro o cinque** elementi, ma sapeva ben destreggiarsi con quantità minori.
<u>Altri esempi</u>: Il cardellino sa distinguere fra due mucchi di semi quello che ne contiene di più.
La vespa solitaria depone in ogni celletta accanto all'uovo un numero fisso di bruchi a seconda della grossezza della specie.
Un'altra vespa addirittura differenzia il numero di bruchi a seconda del sesso dell'individuo che nascerà dall'uovo: cinque bruchi per il maschio, dieci per la più grande femmina.

Come gli animali, così anche alcune popolazioni, che si trovano oggi in stadi primitivi di sviluppo hanno una percezione limitata del numero.

Diverse tribù dell'Africa, dell'Oceania e dell'America, fin almeno all'inizio di questo secolo conoscevano unicamente i numeri uno, due, tre, quattro, e indicavano quantità maggiori con termini generici come: "molti", "moltitudine", "folla".
Altre tribù come *gli Aranda Australiani* o gli *indigeni delle isole Murray nello stretto di Torres*, conoscevano soltanto i termini corrispondenti a "*uno*" e "*due*", denominando il tre come "*due e uno*", e il quattro come "*due e due*".

<u>Perché non hanno definito il cinque come "*due e due e uno*"</u>?
La risposta sta probabilmente nella limitata capacità dell'uomo di percepire spontaneamente (a colpo d'occhio) una quantità di elementi superiori a quattro (Fig. 1).

Questi limiti percettivi naturali non hanno impedito a culture umane più avanzate di mettere a punto sistemi pratici per i conteggi necessari alla vita di tutti i giorni.

Così popolazioni legate alla pastorizia contarono le pecore servendosi di tacche intagliate su un bastone o su un osso (fig. 2), o di sassi raccolti in un contenitore (fig. 3).

Uno degli esempi più significativi di queste pratiche è una "bulla" che risale al XV sec. a.C. Nelle rovine del palazzo di Nuzi in Irak è stato rinvenuto un contenitore d'argilla con dentro 48 palline d'argilla. sul contenitore era incisa la seguente scritta:
"oggetti riguardanti pecore e capre:
21 pecore che hanno già avuto dei piccoli, 6 agnelli femmine,
8 montoni adulti, 4 agnelli maschi,
6 capre che hanno già avuto dei piccoli, 1 capro, 2 caprette".
Essendo 48 il totale degli animali si poteva dedurre che ogni sassolino era in corrispondenza con un animale. Probabilmente l'antica scritta era stata incisa, dopo aver sigillato il contenitore, da un funzionario di qualche ricco proprietario al momento di affidare il gregge ad un pastore. Costituiva

un “documento” controllabile al rientro dal pascolo: alla consegna degli animali il funzionario leggeva la scritta, il pastore esaminava i sassi.

Da un punto di vista matematico questi procedimenti di conteggio si basano sul noto concetto di corrispondenza biunivoca.
Si tratta di appaiare un oggetto della raccolta che si vuole conteggiare con un elemento della raccolta di controllo: <u>tacca</u>, <u>sasso</u>, <u>nodo</u>, <u>dita</u>, ecc.
I più antichi documenti aritmetici sono alcune ossa di lupo preistorico, risalenti 30.000 anni fa, rinvenute nel 1937 nella grotta di Kulna nella Rep. Ceca (fig. 2).

Contrariamente a quanto si potrebbe pensare queste tecniche non sono scomparse con l'affermarsi dei sistemi di numerazione.

ESEMPI:
- Bastoni inglesi del XIII sec. (fig. 4).
- I pastori svizzeri hanno mantenuto a lungo l'usanza di incidere su una tavoletta appositamente contrassegnata il numero (numeri romani) degli animali condotti al pascolo (fig. 5).
- Nella Russia zarista dei secoli XVII e XVIII era in uso il seguente metodo per documentare i prestiti di denaro: un bastone veniva tagliato longitudinalmente in due parti, poi veniva tenuto insieme per incidere delle tacche, su entrambe le parti del bastone, corrispondenti alle somme di denaro prestate. ognuno dei contraenti in presenza di testimoni apponeva un marchio personale su uno dei pezzi, chiamati "taglie". Infine le controparti si scambiavano le taglie.
- Anche nelle campagne francesi, fino all'inizio del '900, i fornai adoperavano delle "taglie" per tenere il conto del numero dei pani acquistati dai clienti, che venivano pagati a scadenze fisse (fig. 6).
- Nella civiltà degli Incas si utilizzava un sistema di numerazione posizionale composto da nodi formati su delle funicelle chiamate "***quipo***". Gli Incas non conoscevano la scrittura e le funzioni di contabilità, di rilevamento statistico e persino di comunicazione nel loro vasto dominio, venivano svolte tramite queste cordicelle annodate. Alla composizione del quipo, alla lettura e conservazione, venivano addetti speciali funzionari chiamati "quipucamayoc", cioè i "guardiani dei nodi". Questi funzionari mandavano periodicamente copie dei quipu alle autorità centrali che ne ricavavano informazioni sulle varie regioni dell'impero. I quipu sono stati usati fino al secolo scorso dai pastori peruviani (fig. 7).

Questi sistemi hanno permesso di tenere una contabilità e stendere dei contratti anche a persone che non sapevano né leggere né scrivere.

Il conteggio corporale.

Un altro tipo di procedimento pratico diffuso tra le tribù anche di luoghi molto diversi è quello che mette in relazione gli oggetti da conteggiare con le parti del corpo umano.

Le tribù dello *stretto di Torres*, i *Papua*, e gli *Elema* della *Nuova Guinea*,
adoperano questo sistema:
non richiede che si recitino né che si conoscano i nomi dei numeri (fig. 8).

L'indigeno della figura se vorrà controllare o comunicare il numero di una raccolta di oggetti inizierà ad appaiarli con le parti del corpo seguendo un ordine prestabilito: mignolo destro, anulare, medio, ecc., e si dovrà ricordare solamente l'ultima parte del corpo che si è toccato. Potrà ripetere il procedimento tutte le volte necessarie. In questo modo di operare è implicito il concetto di ordine che non è necessario qualora si proceda intagliando tacche o mettendo gli oggetti da contare in corrispondenza biunivoca con la raccolta di controllo.

I nomi dei numeri

Anche i nomi dei numeri hanno subìto una lunga evoluzione nel corso della storia.

In un primo momento

erano presenti unicamente i primi due, tre, quattro nomi, e non esistevano ancora metodi per il conteggio.
Come prova di ciò si può osservare che il tre mantiene in diverse lingue, antiche e moderne, il significato di "*molto*".

- Il greco τρισ–αθλιοσ, letteralmente "*tre-infelice*" significa "*molto infelice*"; come pure τρι–παλαι, letteralmente "*tre un tempo*", significa "*molto tempo fa*";
- il latino "*terfelix*" sta per "*felicissimo*", e "*bisterque*" significa "*più volte*";
- in lingua francese "*très*" significa "*molto*";
- in lingua inglese "*thrice*" mantiene il doppio significato di "*tre volte*" e di "*molti*".

In un secondo momento

si sono diffuse tecniche pratiche basate sui concetti di corrispondenza e di ordine, che permettevano di effettuare controlli su certi insiemi di oggetti.

(FIG. 9) Esempio di una tribù della Nuova Guinea.
Per le popolazioni che usavano il conteggio corporale in questa fase i nomi dei numeri coincidevano con i nomi delle parti utilizzate.

In un terzo momento

i nomi dei numeri si sono progressivamente svincolati dal riferimento concreto.

- Esempio della tribù Zuni i pellerossa.
  In tribù come questa si usano dei "concetti manuali" per indicare i numeri, non servendosi del nome della parte del corpo usata, bensì della posizione delle parti durante il conteggio.
  Il numero 1: "preso per cominciare";
  Il numero 2: "preso con il precedente";
  Il numero 3: "il dito che divide in eguale misura";
  Il numero 4: "tutte le dita alzate (di una mano) meno una";
  Il numero 5: "l'intagliato (si faceva una tacca su un pezzo di legno)";
  Il numero 6: "un altro aggiunto al già contato";
  ...
  Il numero 10: "tutte le dita";
  Il numero 11: "tutte le dita più una";
  e così via.
  È attraverso questo processo che si può essere giunti al modo odierno di contare, svincolandosi sempre di più da riferimenti concreti per passare a modalità sempre più astratte.

  Sicuramente il processo di evoluzione
  non è stato così lineare come è stato presentato.
  Rimangono ancora oggi nelle lingue alcuni nomi di numeri associati a oggetti diversi.

  - Nei Maori la parola per indicare quattro è "cane".
  - Una tribù del Sud America esprime il tre come "le dita del piede di rhea" (un uccello locale).
  - Una tribù della Columbia Britannica possiede sette diversi gruppi di termini per i numeri: uno viene usato per gli oggetti piatti e gli animali, uno per gli oggetti lunghi e gli alberi, uno per le canoe, uno per le misure, uno per contare senza riferirsi ad oggetti precisi. Probabilmente i primi sei sistemi sono sopravvissuti per questioni di abitudine, mentre non sarebbero più necessari.
  - In Italiano si dice che: due calze sono un *paio*, due sposi sono una *coppia*, due numeri al lotto sono un *ambo*, due cantati sono un *duo*.

Ciò testimonia l'importanza del riferimento ad oggetti concreti, ed inoltre che il passaggio dal numero concreto al numero astratto è un processo lungo e non lineare che ha chiesto all'uomo sforzi notevoli nel corso della sua storia.
Nelle lingue maggiormente diffuse oggi non sembra che i nomi dei numeri rechino traccia della loro origine.
Pare piuttosto che assumano significati puramente convenzionali.
Tuttavia secondo alcuni storici della matematica nel linguaggio *sanscrito*, da cui derivano i termini di molte lingue europee, i nomi dei numeri contengono residui di precedenti tecniche di calcolo (fig. 10), (fig. 11).

I numeri figurati

Dopo la fase dell'uso di ossa, bastoncini, sassi, nodi, probabilmente l'uomo passò alla rappresentazione figurata degli oggetti.
Interessanti rappresentazioni furono adottate a partire dal VI sec. a.C. dai seguaci di Pitagora:
i numeri figurati.
I Pitagorici consideravano il numero:

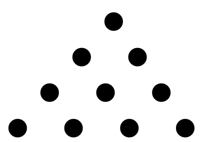
- come principio di tutte le cose,
- come composto da aggregati di monadi,
  cioè corpuscoli unitari
  a cui attribuivano entità fisica.

Da questa concezione probabilmente derivò l'interesse per i numeri figurati, particolari disposizioni regolari di forma geometrica che rimandano a configurazioni realizzabili con sassi o vari oggetti.

"*Dobbiamo anzitutto ammettere che ogni lettera con la quale si indica un numero, come iota (segno per dieci),*
esprime tale numero per convinzione umana,
non secondo natura:
e che, d'altra parte, l'indicazione naturale, non artificiale, e pertanto più semplice di un numero è quella di collocare una accanto all'altra le unità in esso contenute."

Nicomaco di Gerasa, neo-pitagorico I sec. a.C. (fig. 12)

Il numero triangolare 10



era considerato il simbolo cosmico, perché somma dei quattro ordinamenti:
unità, *linea*, *piano*, *solido*.
La sacra **tetraktis**
$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
era stata assunta a simbolo della Scuola Pitagorica.
I numeri figurati sono un esempio di **aritmetica geometrica**.
Ma dopo la crisi che seguì la scoperta dei numeri irrazionali per un lungo periodo nel pensiero Greco la geometria prevaleva sull'aritmetica:
Euclide esprimeva i numeri come segmenti di una retta.

La numerazione digitale

Nella fase del conteggio, popolazioni di diverse parti del mondo hanno fatto uso delle dita e di altre parti del corpo per metterle in corrispondenza biunivoca con la raccolta di oggetti da contare.

In un secondo momento questo sistema si perfezionò, assumendo carattere di rappresentazione astratta, e giungendo a rappresentare per mezzo delle dita anche numeri di grande valore.

ESEMPI
(Fig. 13) Si hanno numerose testimonianze di trattative fra mercanti nel mondo orientale che avvenivano, fino agli inizi di questo di secolo, nascondendo le mani sotto un telo, con lo scopo evidente di non fare conoscere agli estranei l'ammontare delle somme via via concordate. Il sistema non permetteva di comunicare l'ordine di grandezza, per cui lo stesso segno poteva indicare 2 o 20 o 200 o 2000 e così via. Bisognava perciò che i mercanti fossero d'accordo in precedenza sul valore approssimativo della merce di cui si trattava.

Nel mondo greco la pratica digitale doveva essere molto diffusa.
Il commediografo **Aristofane** (444-380 a.C.) nella sua opera *Vespe*, invita a calcolare sulle dita e non con i sassolini dell'abaco, le entrate dello stato ateniese e la spesa per pagare i giudici, confrontando poi il risultati...

I Romani usarono una tecnica simile che era chiamata "*indigitatio*".
Giovenale nelle *Satire* scrive:
"*felice è certamente colui che... conta i suoi anni sulla mano destra*".
I termini latini
per unità: "*digiti*",
e per decine: "*articuli*",
rimandano alle dita ed alle articolazioni usate nella rappresentazione manuale.

A questo proposito la parola inglese "*digit*" conserva il doppio significato di cifra e dito;
e la parola "*bit* ", usata in elettronica, è una abbreviazione di "*binary digit*", cioè cifra binaria.

ESEMPI
(Fig. 14) Esempio di numerazione digitale orientale tratta da un dizionario persiano del XVI sec.
(Fig. 15) Esempio di numerazione digitale occidentale ripresa dal trattato "*De loquela digitorum*" del Venerabile Beda VII sec.
Con questi sistemi era possibile rappresentare qualsiasi numero fra 0 e 10.000, e anche maggiori ricorrendo a movimenti convenzionali, come per esempio per indicare 20.000 si indicava due mettendo la mano sinistra sul petto.

Il grande matematico **Leonardo Pisano** (1180-1250),
che diffuse in Europa il sistema di numerazione e gli algoritmi arabi, difese la rappresentazione digitale:
"***è necessario che coloro che vogliono far buon uso dell'arte dell'abbaco si mostrino abili ed esperti nella conoscenza del calcolo a mezzo della figurazione manuale, ingegnosamente introdotta dagli antichi, secondo la pratica dei maestri d'abbaco***".
Oltre ai sistemi di rappresentazione digitale decimale visti finora, sono esistiti anche metodi che sfruttavano basi diverse.
Esempio (fig. 16):
sistema a base cinque usato da mercanti indiani
della regione di Bombay.

Sistemi di numerazione

I più antichi documenti scritti sumerici risalgono al quarto millennio a.C.
Tavoletta di Kish.
In questi documenti si trovano dei segni numerici che sono stati così ricostruiti:

Numerali sumerici

Gesh	U	Gèsh	Gèsh-U	Shar	Shar-U
1	10	60	600	3.600	36.000

Questo sistema di numerazione era misto.
Presentava contemporaneamente caratteristiche della numerazione decimale e sessagesimale, ed era di tipo additivo:
un numero veniva scritto tramite ripetizioni dei segni numerici.

Esempio: 3162

Sempre in ambito Sumero, ma più tardi, verso il XXVII sec. a.C., si diffuse la scrittura cuneiforme, ed anche i numerali assunsero la forma di "chiodo" e "cuneo".

1	10	60	600	3.600	36.000

Esempio: riscriviamo il numero 3162.

Esempio (fig. 17).Questa è una tavoletta del periodo della scrittura cuneiforme

Nel periodo **Babilonese**,
dal XVIII sec. a.C., il sistema fu modificato, perché gli invasori *Accadi* ne accentuarono il <u>carattere decimale</u>, introducendo accanto ai vecchi, nuovi segni per il cento, mille e diecimila.

100	1000	10000

<u>I matematici e gli astronomi Mesopotamici</u>
fin dall'inizio del II millennio a.C., adottarono un sistema rigidamente posizionale, ma sempre misto, in quanto usavano la base sessagesimale come base principale e contemporaneamente la base dieci per esprimere i numeri entro la sessantina. Si faceva uso di due soli segni per rappresentare qualsiasi numero:

1 10

Esempio:

13	45	29
13 x 3.600	45 x 60	29 x 1
46.800 + 2.700 + 29 = 49.529		

Ma in questa fase si pose il problema dell'uso dello **zero**.
In una tavoletta trovata a Uruk si legge:
"*calcola il quadrato di (2 27) e troverai (6 9)*"
Ma...
2 27 corrisponde al nostro
2 x 60 + 27 x 1 = 147
e il quadrato di 147 è 21.609
che doveva corrispondere a
6 0 9
cioè
6 x 3600 + 0 x 60 + 9 x 1 = 21.609
e non
6 9
cioè
6 x 60 + 9 x 1 = 369

Questo esempio mostra chiaramente le difficoltà che sorgono quando non si dispone di un segno per indicare il valore di una posizione nulla, ovvero uno "spazio vuoto".
In un periodo successivo i dotti Babilonesi per evitare difficoltà lasciarono uno spazio vuoto sulla tavoletta in corrispondenza della potenza di 60 da saltare.
Fu finalmente dopo il III sec. a.C. che usarono due segni per indicare lo spazio vuoto.

Questi segni venivano adoperati solo come cifre per comporre i numerali a cui corrispondeva una quantità, ma non ancora come zero, perché ad esempio nelle sottrazioni del tipo
20 - 20 =
i Babilonesi ricorrevano ad espressioni del tipo
"*il grano è finito*"
oppure
"*vedi tu*"...
La notazione Babilonese per indicare i numeri può sembrare a prima vista insolita,

ma fu adottata dagli astronomi Greci e successivamente Arabi.
Ma ancora oggi il sistema mesopotamico sta alla base delle nostre notazioni usate per indicare le ampiezze degli angoli: gradi, primi, secondi,
e la durata del tempo:
ore, minuti primi e minuti secondi.

Il sistema egiziano

A partire dal 3.000 a.C. si hanno testimonianze di numerali egiziani.
Gli Egiziani usarono due notazioni diverse,

- quella *geroglifica* usata per le iscrizioni su pietra,
- quella *ieratica* per la scrittura su papiro.

Il sistema di numerazione era di tipo additivo.
(Fig. 18) Sistema di numerazione Egiziano geroglifico.
(Fig. 19) Sistema di numerazione Egiziano ieratico,
tratto dal Grande Papiro Harris.

Il primo documento è la sommità in pietra dello scettro del re Menes, fondatore della prima dinastia.
(Fig. 20) Riporta i numeri di un bottino di guerra:
400.000 buoi, 1.422.000 capre, 120.000 prigionieri.

Il sistema cinese

Notevolmente antico è anche il sistema di numerazione Cinese,
risalente ad un periodo fra il XIV e XI sec. a.C.
(Fig. 21) Questi segni sono stati rinvenuti su ossa di cervo, di bue, di pecora, e su gusci di tartaruga screpolati dal fuoco, perché venivano usati come strumenti per la divinazione col fuoco da sacerdoti indovini della corte dei sovrani Shang.

Il sistema di numerazione era di tipo misto:
alcuni numeri come 10, 20, 30, 40 erano scritti ripetendo il segno della decina: sistema additivo,
le altre decine presentavano una notazione moltiplicativa: ad esempio 50 era scritto con il numerale 10 sopra al 5

10	
5	

I numerali cinesi si sono diffusi in vari paesi, come il Giappone e il Vietnam, dando origine ad un numero notevole di varianti.
A partire dal II sec. a.C. è documentato inoltre il sistema di numerazione dei matematici e contabili cinesi, ottenuto combinando barre verticali e orizzontali.
(Fig. 22) Le due serie di numeri venivano usate generalmente in modo alternato per evitare confusioni per esempio fra la cifra delle unità e quella delle decine. La mancanza dello zero, almeno fino al sec. VIII d.C. quando fu introdotto in Cina dall'India, creava ancora notevoli difficoltà.

Il sistema maya

Il popolo Maya disponeva probabilmente a partire dal III sec. d.C. di un sistema di numerazione a base venti dovuto all'uso di contare anche le dita dei piedi oltre che quelle delle mani.
Sono documentati numeri scolpiti su steli di pietra in caratteri geroglifici Maya che riguardano principalmente date e calendari.
Il sistema era additivo ed era presente il segno per lo "spazio vuoto".

Non sono stati ritrovati a tutt'oggi documenti che riportino caratteri adibiti agli usi quotidiani, che, come è stato testimoniato, erano presenti in altre popolazioni del centro america.
Gli astronomi e sacerdoti Maya usavano nei loro manoscritti un sistema del tutto diverso, chiaramente posizionale, e con l'uso di un simbolo specifico per lo zero. (Fig. 23)

I numeri si scrivevano in verticale e la base di tale sistema era vigesimale, ma con qualche eccezione:
nel posto più basso si avevano le unità,
sopra le ventine,
sopra ancora le 360-ine (non 400-ine),
sopra infine le 7200-ine (8000-ine).

unità del 3° ordine	7200-ine
unità del 2° ordine	360-ine
unità del 1° ordine	ventine
unità semplici	unità

Questa particolarità era dovuta al fatto che il sistema era usato per il computo del tempo.
Esempio: 327

. ____ ____ ____	16 X 20 = 320
.. ___	7 x 1= 7

Il sistema greco

Caratteristiche molto diverse da quelle viste finora avevano le numerazioni alfabetiche come quella greca in cui si usavano come numerali le lettere dell'alfabeto.
La prima numerazione greca documentata risale al V sec. a.C., è nota come "*Attica*" perché sviluppata in ambiente Ateniese, oppure "*erodianica*" dal nome del grammatico *Erodiano* (circa 170-240 d.C.) che ne diede una descrizione completa.

Si usava un sistema "acrofonico":
per rappresentare i segni fondamentali si scrivevano le iniziali dei loro nomi ed era principalmente di tipo additivo (fig. 24).
A partire da III sec. a.C. fu sviluppato un altro sistema, sempre alfabetico ma non acrofonico, chiamato "Ionico".
Erano utilizzati 27 simboli alfabetici, seguiti da un apice: le 24 lettere dell'alfabeto greco classico, più 3 lettere cadute in disuso: digamma, coppa, san (fig. 25).
Siccome questo sistema non poteva per sua natura essere di tipo posizionale, sorgevano numerosi problemi quando si dovevano rappresentare numeri di grande valore.

Tuttavia i greci elaborarono con Archimede ed Apollonio, sistemi per rappresentare numeri di grandissimo valore.
Archimede utilizzava potenze di 10 come moltiplicatori.
Apollonio invece adoperava potenze di 10,

per esempio:
43.726.971
veniva scritto con segni alfabetici come:
4.372 x 10.000 + 6.971
I sistemi greci di numerazione influenzarono largamente le popolazioni limitrofe, e furono tradotti nelle loro lingue dagli Ebrei, Copti, Georgiani ed anche Goti.

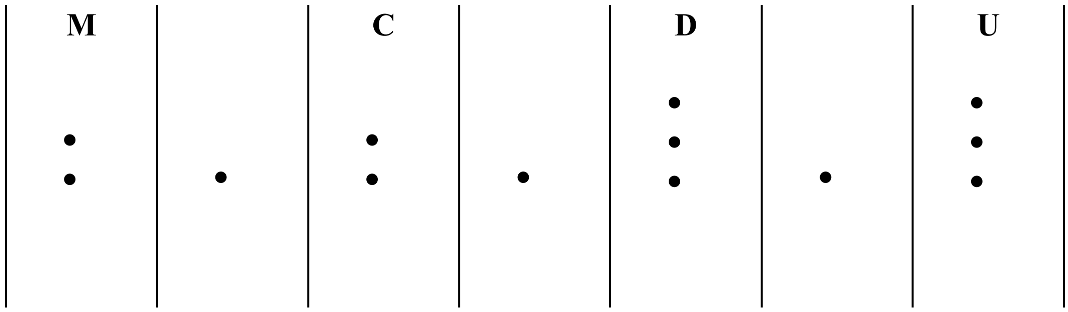
Il sistema romano

Il sistema di numerazione dell'antica Roma è a tutti noto.

I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**50**	**100**	**500**	**1000**

Secondo alcuni studiosi i simboli traggono origine dal sistema greco, secondo altri derivano dalla pratica dell'intaglio su bastoni.
Mentre in un primo momento il sistema era esclusivamente additivo, quattro era rappresentato con IIII, in un secondo momento si affermò anche un principio sottrattivo, quattro era indicato con IV, cioè cinque meno uno.
Si dice pertanto che il sistema di numerazione romano è di tipo additivo-sottrattivo.
Questo fatto ha causato diverse complicazioni quando si dovevano eseguire dei calcoli.
Gli antichi Romani utilizzavano a questo scopo strumenti di calcolo chiamati abachi, già usati da Indiani, Cinesi e Greci, che sfruttavano di fatto il principio posizionale, anche se non presente nella scrittura.

Esempio di rappresentazione di 2788
sull'abaco romano a righe



Il sistema indiano

Dal sistema Indiano derivano:

- i nostri numerali,
- il nostro sistema di numerazione e
- i nostri algoritmi di calcolo.

Quando parliamo del nostro sistema, più che <u>cifre arabe</u> bisognerebbe dire <u>cifre indiane</u>.
Esistono infatti dei documenti su rame, che risalgono tra la fine del VI sec. e la metà del X sec. d.C.,
che contengono numeri scritti in notazione posizionale.

In due iscrizioni su pietra, ritrovate presso la città di Gwalior, scolpite in caratteri sanscriti nell'875 e nell'876 d.C., confermano l'uso della notazione posizionale.
(Fig. 26) In questa figura si riportano, dalla prima iscrizione di Gwalior, i numeri scritti in notazione posizionale usati per indicare il numero dei versi. Nella prima fase il sistema di numerazione Indiano non era strettamente posizionale, in quanto oltre ai simboli riportati ne esistevano altri per indicare i multipli di dieci. Ad esempio 400 era scritto 4 x 100.
Tra il VI e il VII sec. d.C. si giunse ad una numerazione posizionale del tutto simile alla nostra, usando il termine "*sunya*", che letteralmente significa "*vuoto*", per indicare lo zero, rappresentato con un tondino.
Da questo periodo in poi fu possibile sostituire l'abaco, fino allora usato per i calcoli, con algoritmi simili ai nostri.

Il sistema arabo

Dagli stretti rapporti con la società e la cultura Indiana, gli Arabi conobbero a partire dall'VIII sec. d.C. il loro sistema di numerazione, e ne appresero l'uso.
Si narra di una delegazione Indiana che in questo periodo si sarebbe recata dal Califfo *al-Mansur* per presentargli il proprio sistema di numerazione.
Tralasciando la leggenda, si hanno notizie sicure che *al-Mansur* incaricò il matematico *al-Khuwarizmi* (circa 780-850 d.C.) di scrivere una summa delle conoscenze aritmetiche del tempo, giunta a noi nella traduzione latina *Algoritmi de numero indorum* del XII sec. d.C.
Tale opera ebbe tanta fortuna in Europa da far assurgere il termine "*algoritmo*" (corruzione del nome dell'autore) al significato attuale.
Dal termine arabo usato per designare lo zero, "*zifr*", derivano sia il nostro termine "zero" che la parola "cifra": infatti lo zero era considerato la cifra per eccellenza, perché la sua invenzione permise di passare dalla rappresentazione dei numeri sull'abaco alla notazione scritta, e ad eseguirne i calcoli.
(Fig. 27) Le cifre erano scritte in modo differente dagli Arabi orientali che furono i primi in ordine di tempo ad adottarle, e dagli Arabi occidentali di Spagna, a cui giunsero verosimilmente durante il IX sec. d.C. Le prime erano cifre "*hindi*", le seconde cifre "*ghobar*". Il termine "ghobar" in arabo significa "polvere" e sta ad indicare l'abitudine di tracciare le cifre su tavole cosparse di sabbia o farina, di probabile invenzione Indiana.
Gerbert d'Aurillac (circa 940-1003) il futuro papa Silvestro II, introdusse in Europa le cifre ghobar, conosciute probabilmente durante un soggiorno spagnolo.
(Fig. 28) Utilizzò queste cifre per rappresentare i numeri sui gettoni dell'abaco, da lui creato modificando l'abaco romano. Escluse lo zero perché non serviva per i calcoli sullo strumento.

Il merito dell'introduzione del sistema Arabo in Europa viene attribuito principalmente ad un matematico italiano, *Leonardo Pisano* detto *Fibonacci* che venne a contatto con i numeri e gli algoritmi arabi nell'ambito degli scambi commerciali fra i paesi nord-africani e le repubbliche marinare.
Nel *Liber abaci* del 1202 Leonardo illustra l'uso delle "nove figure indiane" e dello "zefiro" (sua traduzione del termine arabo "zifr", da cui deriverà più tardi il termine zero), insegna inoltre gli algoritmi per eseguire le operazioni fondamentali e l'estrazione di radici con procedimenti che sfruttano il principio della notazione posizionale. (Fig. 29)

Calcolo digitale

Tutti i bambini, specie nei primi anni della scuola elementare, si aiutano con le dita durante l'esecuzione di addizioni o sottrazioni.
Tecniche un po' più elaborate permettono di eseguire anche operazioni di moltiplicazione.
Le dita della mano diventano così una sorta di abaco moltiplicatore portatile.

Esempio: tecnica di moltiplicazione digitale di numeri naturali maggiori di 5 e minori di 10 (6 7 8 9).

Eseguiamo 7 x 9

1. Su una mano rappresentiamo il 7 abbassando 2 dita (cioè la differenza fra 7 e 5).
2. Sull'altra mano rappresentiamo il 9 abbassando 4 dita (cioè la differenza fra 9 e 5).
3. Per ottenere la cifra delle decine si sommano le dita piegate: 4 + 2 = 6. (Decine quindi 60)
4. Per ottenere la cifra delle unità si moltiplicano fra loro i numeri delle dita alzate: 3 x 1 = 3.
5. Si sommano i risultati 60 + 3 = 63.

La spiegazione matematica è un po' complessa, ma la tecnica è in realtà di semplice applicazione.
Ancora oggi esistono tracce di tale metodo di calcolo in Siria, Irak, Iran, India, in alcune regione della Russia e del Nord-Africa.
Il procedimento è piuttosto antico: appare nelle opere dei matematici iraniano Behà ad-Din al'Amuli (1547 -1622), e francese Nicolas Chuquet (1445 - 1500), anche se probabilmente di origine più remota.
Un metodo simile permette di moltiplicare i numeri maggiori di 10 e minori di 15 (11 12 13 14).
Esempio: 12 x 14

1. Si rappresenta il numero 12 su una mano piegando 2 dita, cioè la differenza fra 12 e 10.
2. Si rappresenta il numero 14 sull'altra mano piegando 4 dita, cioè la differenza fra 14 e 10.
3. Si sommano le dita piegate e si moltiplica il risultato per 10: (2 + 4) x 10 = 60
4. Si moltiplicano fra loro i numeri delle dita piegate in ogni mano: 2 x 4 = 8
5. Si sommano i due risultati e si aggiunge 100 cioè 60 + 8 + 100 = 168

Antichi algoritmi

I popoli antichi cercarono di superare i limiti posti dai sistemi di numerazione mettendo a punto metodi per facilitare le operazioni fondamentali.
Ricorsero spesso all'uso di tavole per calcolare (abachi) ed elaborarono in altri casi algoritmi per le operazioni scritte.
Gli antichi Egizi:

- Eseguivano le addizioni in modo simile all'attuale, eseguendo riporti.
- Per la sottrazione applicavano la tecnica "per completamento" ancora in uso oggi quando si tratta di dare un resto in denaro.
  Ad esempio 123 - 87
  - Si partiva da 87,
  - aggiungendo 3 si otteneva 90,
  - aggiungendo 10 si arrivava a 100,
  - aggiungendo 23 si arrivava a 123,
  - infine si sommavano i numero ogni volta aggiunti: 3 + 10 + 23 = 36

Completamente diverso dal nostro è invece l'algoritmo della moltiplicazione, detta "per raddoppio".

- Esempio 324 x 12

	1	324
	2	648
\	4	1296
\	8	2592

1296+ 2592 = 3888

- la prima colonna indica l’ordine dei multipli di 324,
- il cui risultato viene scritto nella seconda colonna.
- sommando il multiplo di ordine 4 e quello di ordine 8, evidenziati con una barra, si ottiene l’ordine di $4 + 8 = 12$ di 324.

In sostanza si sono applicate le proprietà distributiva ed associativa:

$324 \times 12 = 324 \times (4 + 8) = 324 \times 4 + 324 \times 8$

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione: quindi ad esempio per trovare il risultato dell'operazione 150 : 30 significa cercare il numero che moltiplicato per 30 dà 150, cioè 5.
Gli Egizi eseguivano la divisione in modo simile.

Esempio 228 : 12

\	1	12
\	2	24
	4	48
	8	96
\	16	192

- Nella prima colonna si scrive l'ordine dei multipli di 12, raddoppiando ad ogni passaggio,
- nella seconda colonna si scrivono i relativi multipli, fermandosi al numero minore di 228,
- si inizia da 192 e si cerca quali altri multipli di 12 occorrono per arrivare a 228, cioè 12 + 24 + 192 = 228,
- il risultato della divisione sarà ottenuto sommando gli ordini corrispondenti ai multipli barrati 16 + 2 + 1 = 19 ed infatti:

19 x 12 = (16 + 2 + 1) x 12 = 192 + 24 + 12 = 228

Algoritmi medievali

Nonostante comunemente si pensi che gli algoritmi delle operazioni oggi in uso siano sempre rimasti immutati nei secoli, a ben altre conclusioni porta lo studio di come erano eseguite le operazioni nei vari periodi storici.
Particolarmente interessanti sono gli algoritmi messi a punto dai "maestri d'abaco", matematici dell'epoca medievale che "tenevano bottega" per eseguire calcoli, dare consulenze su transazioni commerciali, cambi di moneta e di unità di misura e per istruire i giovani mercanti sulle basi dell'aritmetica.
Gli algoritmi dei Maestri d'abaco differiscono da quelli oggi adoperati non tanto per l'addizione, in parte per la sottrazione ma in modo sostanziale per la moltiplicazione e la divisione.

La sottrazione

La sottrazione veniva eseguita più che nel modo attuale nel modo per "complemento".
Esempio: 6481 - 1846
- Si incolonnano i numeri normalmente

$$\begin{array}{r} 6\,4\,8\,1\ - \\ \underline{1\,8\,4\,6}\ = \end{array}$$

- si calcola il complemento a dieci della cifra 6 delle unità del minuendo: cioè 10 - 6 = 4,
- al risultato 4 si aggiunge la cifra 1 delle unità del sottraendo: cioè 4 + 1 = 5,
- si scrive 5 nel posto del risultato corrispondente alle unità

$$\begin{array}{r} 6\,4\,8\,1\ - \\ \underline{1\,8\,4\,6}\ = \\ 5\ \ \ \end{array}$$

- per le altre cifre si procede come sopra, eseguendo il completamento a nove anziché a dieci:

$$\begin{array}{r} 6\,4\,8\,1\ - \\ \underline{1\,8\,4\,6}\ = \\ 3\,5\ \ \ \end{array}$$

9 - 4 = 5
5 + 8 = 13

- Nel caso in cui il risultato sia come ora 13 cioè maggiore di 10 si scrive l'ultima cifra 3, ma si ricorda di togliere 1 alla successiva cifra 8 del sottraendo:

$$\begin{array}{r} 6\,4\,8\,1\ - \\ \underline{1\,8\,4\,6}\ = \\ 3\,5 \end{array}$$

8 - 1 = 7
9 - 7 = 2
2 + 4 = 6

-Nell'ultimo passaggio non va considerato il riporto che esiste sempre se l'operazione è possibile:

$$\begin{array}{r} 6\,4\,8\,1\ - \\ \underline{1\,8\,4\,6}\ = \\ 4\,6\,3\,5 \end{array}$$

9 - 1 = 8
8 + 6 = 14 si scrive solo 4

La moltiplicazione

Vari erano i modi per eseguire la moltiplicazione, diverse anche le denominazioni che cambiavano da luogo a luogo:

- "*per biricocholi*" o "*per scachieri*"

quella usata ancor oggi

- "*per crocetta*"
- "*per quadrilatero*"
- "*a reticolo*" o "*a gelosia*"
- "*a castelluccio*"
- "*alla francese*"

Moltiplicazione per quadrilatero

La moltiplicazione per quadrilatero è così chiamata per la disposizione a rettangolo che assume:

- Esempio: 2348 x 421

2	3	4	8	
2	3	4	8	1
4	6	9	6	2
9	3	9	2	4

- nella prima riga si scrive il risultato di 2348 x 1
- nella seconda riga si scrive il risultato di 2348 x 2
- nella terza riga si scrive il risultato di 2348 x 4

Il risultato si ottiene addizionando le cifre dei quadratini in <u>diagonale</u>, partendo da quello in alto a destra e procedendo sempre in diagonale da sinistra a destra e dall'alto in basso.

- L'ultima cifra del risultato è 8.
- La penultima è 4 + 6 = 10 cioè 0 col riporto di 1.
- La terzultima e 3 + 9 + 2 + 1 = 15 cioè 5 col riporto di 1.
- La quartultima è 2 + 6 + 9 + 1 = 18 cioè 8 col riporto di 1.
- La quintultima è 4 + 3 + 1 = 8.
- La prima è 9.
- Il risultato è 988.508

La disposizione a rettangolo e l'addizione in diagonale permettono di addizionare unità con unità, decine con decine, centinaia con centinaia, ecc.

Moltiplicazione a scachieri

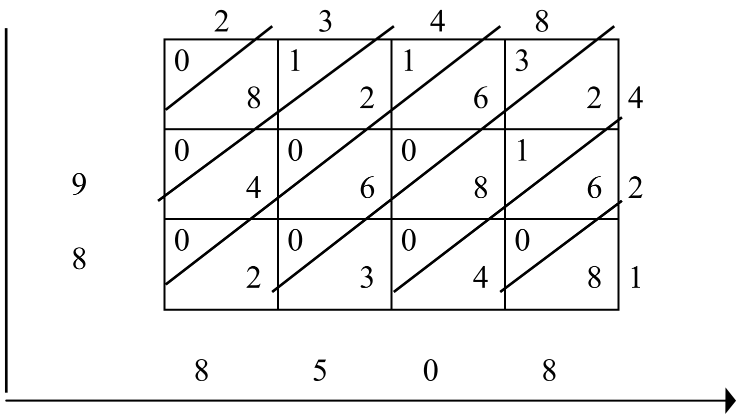
La moltiplicazione a scachieri corrisponde all'algoritmo usato al giorno d'oggi.

```
  2 3 4 8  x
    4 2 1  =
  2 3 4 8
 4 6 9 6 -
9 3 9 2 -
9 8 8 5 0 8
```

Quest'ultimo algoritmo, di probabile origine Indiana era conosciuto ai tempi dei maestri d'abaco con il nome di moltiplicazione per "*biricocholi*" o per "*scachieri*", o per "*organetto*" o per "*scaletta*", dovuto alla configurazione tipica a scalare che le cifre assumono in essa.

Moltiplicazione a reticolo o fulminea

La moltiplicazione a reticolo usa un sistema analogo a quello per quadrilatero, con la differenza di non capovolgere il moltiplicatore e quindi di addizionare sempre dall'alto in basso, ma da destra a sinistra, inoltre semplifica il meccanismo del riporto.



Il risultato si legge seguendo la freccia.

Moltiplicazione a castelluccio

la moltiplicazione a castelluccio è apparentemente simile a quella usuale, ma in realtà differente.

```
  2 3 4 8  x
    4 2 1  =
9 3 9 2 0 0
  4 6 9 6 0
    2 3 4 8
9 8 8 5 0 8
```

Si inizia moltiplicando la prima cifra a sinistra del moltiplicatore (cioè il 4 delle centinaia); di conseguenza l'incolonnamento avviene spostando i risultati parziali verso destra (e non verso sinistra).

Moltiplicazione a crocetta

La moltiplicazione a crocetta risulta essere un po' più complessa.
Esempio 46 x 75

4 6
7 5

---

3 4 5 0

- Si calcola 6 X 5 = 30
  Si scrive 0 nella colonna delle unità e si riportano 3 decine.
- Si calcola (4 x 5) + (7 x 6) = 20 + 42 = 62,
  si aggiunge il riporto 62 + 3 = 65,
  si scrive 5 nella colonna delle decine e si
  riportano 6 centinaia.
- Si moltiplicano 4 x 7 = 28,
  si aggiunge il riporto 28 + 6 = 34,
  che si scrive come 4 centinaia 3 migliaia.

La ragione di questo modo di procedere
consiste nel fatto che:

- moltiplicando unità per unità si ottengono unità
  con eventuale riporto di decine,
- moltiplicando unità per decine si ottengono decine
  con eventuale riporto di centinaia,
- moltiplicando decine per decine
  si ottengono centinaia
  con eventuale riporto di migliaia.

Moltiplicazione alla francese

La moltiplicazione *alla francese* o detta *a calice* è simile a quella a crocetta, con in più l'incolonnamento.

- Esempio 325 x 678

```
   3 2 5 x
   6 7 8 =
 1 8 1 4 4 0
   1 2 3 5
   2 1 1 6
     2 4
     3 0
 2 2 0 3 5 0
```

- nella prima riga vanno scritti i prodotti 3 2 5 / 6 7 8

- nella seconda e terza vanno scritti i prodotti 3 2 5 / 6 7 8   3 2 5 / 6 7 8

- nella quarta e quinta vanno scritti i prodotti 3 2 5 / 6 7 8   3 2 5 / 6 7 8

- Alla fine si esegue l'addizione come nell'algoritmo usuale.

Riferimenti bibliografici

B.D'Amore-P.Oliva, *Numeri.Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri*, Angeli, Milano 1994.
B.D'Amore-F.Speranza, *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*, Angeli, Milano 1995.
B.D'Amore-F.Speranza, *Lo sviluppo storico della matematica Vol.I*, Armando, Roma 1989.
B.D'Amore-F.Speranza, *Lo sviluppo storico della matematica Vol.II*, Armando, Roma 1992.